Ueber Integralinvarianten und Integralparameter

bei Berührungs-Transformationsgruppen

Von

Alf Guldberg

Videnskabsselskabets Skrifter. I. Mathem.-naturvidensk. Klasse. 1902. No. 5

Christiania
In Commission bei Jacob Dybwad
A. W. Brøggers Buchdruckerei
1902

Fremlagt i Videnskabsselskabets Møde d. 24de Januar 1902.

5147
G95u
cop 2

Ueber Integralinvarianten und Integralparameter bei Berührungs-Transformationsgruppen

von

Alf Guldberg.

Die Theorie der Integralinvarianten der Berührungs-Transformationsgruppen rührt bekanntlich von Sophus Lie her. In den folgenden Zeilen werden wir zuerst auf einen Zusammenhang zwischen Integralinvarianten und Differentialparametern der Berührungs-Transformationsgruppen in der Ebene aufmerksam machen, demnächst werden wir den Begriff der Integralparameter auf Berührungs-Transformationsgruppen ausdehnen.

1. Ueber Integralinvarianten und Differentialparameter.

Bezeichnen wir die infinitesimalen Transformationen einer vorgelegten Berührungs-Transformationsgruppe (G) der Ebene x, y mit dem Symbole

$$Bf = \xi(x, y, y')\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x, y, y')\frac{\partial f}{\partial y} + \varkappa(x, y, y')\frac{\partial f}{\partial y'}$$

und ist

$$I = \int \Omega(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)})\, dx$$

eine Integralinvariante $n$ter Ordnung dieser Gruppe, so muss für alle infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe die Variation

$$\delta \int \Omega\, dx = \int (\delta\Omega \,.\, dx + \Omega\delta dx)$$

50098

verschwinden; hierzu ist bekanntlich nothwendig und hinreichend, dass die Gleichung

$$\delta\Omega\, dx + \Omega d\delta x = 0$$

oder die äquivalente

$$B^{(n)}\Omega\, dx + \Omega dBx = 0$$

immer besteht, wo $B^{(n)}f$ die n-mal erweiterte infinitesimale Transformation Bf bedeutet.

Nun ist

$$dBx = \frac{d\xi\,(x, y, y')}{dx}\, dx$$

und dementsprechend wird Ω durch die Gleichungen bestimmt

$$B^{(n)}\Omega + \Omega\, \frac{d\xi\,(x, y, y')}{dx} = 0\,. \qquad \text{A.}$$

Sind nun

$$\int \Omega_1\, dx \quad \text{und} \quad \int \Omega_2\, dx$$

zwei solche Integralinvarianten, so bestehen also für jede infinitesimale Transformation Bf der gegebenen Gruppe die beiden Relationen

$$B\Omega_1 + \Omega_1 \frac{d\xi}{dx} = 0$$

$$B\Omega_2 + \Omega_2 \frac{d\xi}{dx} = 0$$

dann ist

$$B\left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) = 0$$

d. h. das Verhältnis der beiden Grössen Ω_1 und Ω_2 ist eine *Differentialinvariante* der gegebenen Berührungs-Transformationsgruppe.

Wir suchen jetzt einen Differentialparameter unserer Gruppe (G). Man nennt eine Funktion $\omega\,(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}, \varphi, \varphi', \varphi'' \ldots \varphi^{(r)})$ von x, y den Differentialquotienten von y nach x, sowie eine Funktion φ und ihren Differentialquotienten φ', $\varphi'' \ldots$ einen *Differentialparameter*, wenn

ω eine solche Funktion ist, dass, wenn φ irgend eine Differentialinvariante unserer Gruppe ist, stets auch ω eine solche ist. Wenn wir alsdann diese Funktion ω kennten sowie eine Differentialinvariante, so liefert uns ω eine zweite Differentialinvariante. Diese würde in ω für φ eingesetzt eine dritte ergeben u. s. w.

Um die Bestimmungs-Gleichungen eines Differentialparameters aufzustellen, bemerken wir, dass wir φ, da φ irgend eine Funktion von x, y, y', y'' . . . ist, als eine Funktion von x allein auffassen können, da wir uns ja y als eine Funktion von x vorstellen. Bezeichnen wir nun, wie früher, mit dem Zeichen δ die Incremente bei einer infinitesimalen Transformation unserer Gruppe (G), so ist wegen

$$d\varphi \equiv \varphi' \, dx$$

auch

$$\delta d\varphi \equiv \delta\varphi' \, . \, dx + \varphi' \, . \, \delta dx$$

oder, da d und δ vertauschbare Zeichen sind:

$$d\delta\varphi \equiv \delta\varphi' \, . \, dx + \varphi' \, . \, d\delta x$$

also

$$\delta\varphi' \equiv \frac{d\delta\varphi}{dx} - \varphi' \frac{d\delta x}{dx} \, . \qquad \text{(a)}$$

Diese bekannte Formel zeigt, wie man das Increment des Differentialquotienten einer Funktion φ aus dem Incremente von φ und dem von x ableiten kann. Dabei sind die Differentiationen nach x stets totale.

Wir suchen nun einen Differentialparameter, der keine höheren als den ersten Differentialquotienten von φ enthält, also die Form hat: $\omega\,(x, y, y', y'' \, . \, y^{(n)}, \varphi, \varphi')$. Da φ hierin irgend eine Invariante bedeuten soll, so ist in (a) das Increment $\delta\varphi = 0$ zu setzen, so dass kommt:

$$\delta\varphi' = -\varphi' \frac{d\delta x}{dx}$$

Nun ist allgemein

$$\delta\omega \equiv \frac{\partial\omega}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\omega}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\omega}{\partial y'}\delta y' + \frac{\partial\omega}{\partial y''}\delta y'' + \ldots + \frac{\partial\omega}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)}$$

$$+ \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}\delta\varphi + \frac{\partial\omega}{\partial\varphi'}\delta\varphi' \, .$$

Es soll $\delta\omega$ bei unserer Gruppe Null sein, sobald $\delta\varphi = 0$ ist, und zwar für jede infinitesimale Transformation der Gruppe. Dies liefert die Gleichungen:

$$0 = \frac{\partial\omega}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\omega}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\omega}{\partial y'}\delta y' + \ldots\ldots - \frac{\partial\omega}{\partial\varphi'}\varphi'\frac{d\delta x}{dx}$$

oder die äquivalenten

$$B^{(n)}\omega - \varphi'\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}y' + \frac{\partial\xi}{\partial y'}y''\right)\frac{\partial\omega}{\partial\varphi'} = 0\,, \qquad (B)$$

die immer bestehen müssen.

Ist nun

$$I = \int \Omega dx$$

eine Integralinvariante $n$ter Ordnung unserer Berührungs-Transformations-Gruppe (G), so bestehen, wie wir sahen, die Gleichungen

$$B^{(n)}\Omega + \Omega\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}y' + \frac{\partial\xi}{\partial y'}y''\right) = 0\,.$$

Umgekehrt giebt jede Lösung dieser Gleichungen eine Integralinvariante. Wir haben also zu untersuchen ob diese Gleichungen gemeinsame Lösungen besitzen. Diese Frage deckt sich bekanntlich mit der Frage, ob die linearen partiellen und homogenen Differentialgleichungen

$$B^{(n)}f - \Omega\left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}y' + \frac{\partial\xi}{\partial y'}y''\right)\frac{\partial t}{\partial\Omega} = 0$$

gemeinsame Lösungen besitzen.

Diese Frage deckt sich aber, wie man aus den Gleichungen (B) *sieht, mit der Frage, ob unsere gegebene Berührungs-Transformationsgruppe* (G) *Differentialparameter von der Form* $\omega\,(x, y, y', \ldots y^{(n)}, \varphi, \varphi')$ *besitzt.*

Als Beispiel werden wir die eingliedrige Gruppe aller Dilatationen betrachten. Wir haben da:

$$\delta x = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\delta t\,,\quad \delta y = \frac{-1}{\sqrt{1+y'^2}}\delta t\,,\quad \delta y' = 0$$

und also

$$\delta y'' = -\frac{y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\delta t\,,\quad \frac{d\delta x}{dx} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\delta t\,.$$

Unsre Gleichungen reducieren sich auf eine Gleichung, die die Form annimmt

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\frac{\partial f}{\partial y}+0\cdot\frac{\partial f}{\partial y'}-\frac{y''^2}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial f}{\partial y''}-\ldots\ldots-\Omega\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial f}{\partial\Omega}=0,$$

das entsprechende simultane System lautet:

$$\sqrt{1+y'^2}\,\frac{dx}{y'}=\sqrt{1+y'^2}\,\frac{dy}{-1}=\frac{dy'}{0}=(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}\,\frac{dy''}{-y''^2}=\ldots=(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}\,\frac{d\Omega}{-y''\Omega}$$

Als Integrale finden wir:

$$y'=a,\quad x+y'y=b,\quad \frac{\Omega}{y''}=c,\quad \frac{\Omega y'(1+y'^2)}{y''}=d.$$

Eine Integralinvariante ist dann:

$$I=\int y''dx$$

und ein Differentialparameter

$$\Delta\varphi\equiv\frac{\varphi'}{y''}.$$

Da $\varphi=x+y'.y$ eine Differentialinvariante ist, so ist auch $(1+yy''+y'^2):y''$ eine solche u. s. w.

Eine zweite Integralinvariante ist

$$I_1=\int\frac{y''}{y'(1+y'^2)}dx$$

Der Quotient $\dfrac{y''}{\dfrac{y''}{y'(1+y'^2)}}=y'(1+y'^2)$ ist eine Differentialinvariante.

2. Ueber Integralparameter.

Wir nehmen wiederum an, dass eine Berührungs-Transformations-Gruppe (G) der Ebene x, y vorliegt, und wir bezeichnen, wie früher, mit dem Zeichen δ die Incremente bei einer infinitesimalen Transformation unserer Gruppe (G).

Wir nennen nun eine Funktion $\Omega(x, y, y', y''\ldots y^{(n)}, \varphi, \varphi', \varphi''\ldots\varphi^{(r)})$ von x, y, den Differentialquotienten von y nach x, sowie eine Funktion φ und ihren Differentielquotienten $\varphi'\ \varphi''\ \varphi'''\ldots$, einen *Integralparameter*, wenn Ω eine solche Funktion ist, dass $I=\int\Omega dx$ eine Integralinvariante ist, sobald $I_1=\int\varphi(x, y, y', y''\ldots y^{(m)})\,dx$ eine solche ist. Wenn wir

alsdann diese Funktion Ω kennten sowie eine Integralinvariante $I_1 = \int \varphi dx$, so liefert uns $I = \int \Omega dx$ eine zweite Integralinvariante. Diese Ω würde in Ω für φ eingesetzt eine dritte Integralinvariante ergeben u. s. w.

Wir nennen ferner die Funktion $\Omega(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}, \varphi, \varphi' \ldots \varphi^{(r)})$ einen *speciellen Integralparameter*, wenn Ω eine solche Funktion ist, dass $I = \int \Omega dx$ eine Integralinvariante ist, sobald $\varphi(x, y, y', y'' \ldots y^{(m)})$ eine Differentialinvariante ist.

Für die Aufstellung der Bestimmungsgleichungen eines Integralparameters bemerken wir, dass, da $I = \int \Omega dx$ eine Integralinvariante ist, wird Ω bestimmt durch die Gleichungen

$$\delta \Omega dx + \Omega d\delta x = 0$$

und da gleichzeitig $I = \int \varphi dx$ eine Integralinvariante sein soll, muss auch φ entsprechende Gleichungen befriedigen.

Wir suchen nun zunächst einen Integralparameter, der keine höheren als den ersten Differentialquotienten von φ enthält, also die Form hat: $\Omega(x, y, y', y'' \ldots y^{(n)}, \varphi, \varphi')$.

Da φ hierin irgend eine Integralinvariante $I = \int \varphi dx$ bestimmen soll, so ist in die Formel

$$\delta \varphi' = \frac{d\delta\varphi}{dx} - \varphi' \frac{d\delta x}{dx} \tag{a}$$

das Increment $\delta\varphi = -\varphi \frac{d\delta x}{dx}$ zu setzen, sodass kommt

$$\delta \varphi' = -2\varphi \frac{d\delta x}{dx} - \varphi \frac{d^2 \delta x}{dx^2}.$$

Nun ist allgemein

$$\delta \Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Omega}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \Omega}{\partial y'} \delta y' + \ldots + \frac{\partial \Omega}{\partial y^{(n)}} \delta y^{(n)}$$

$$+ \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi'} \delta \varphi'. \tag{I}$$

Dies liefert im vorliegenden Falle folgende Gleichungen zur Bestimmung von Ω:

$$0 = \frac{\partial \Omega}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Omega}{\partial y'}\delta y' + \ldots\ldots + \frac{\partial \Omega}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} + \Omega\frac{d\delta x}{dx}$$

$$- \varphi\frac{d\delta x}{dx}\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} - \left(2\varphi'\frac{d\delta x}{dx} + \varphi\frac{d^2\delta x}{dx^2}\right)\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi'}. \qquad (1)$$

Die Bestimmung eines *speciellen* Integralparameters $\Omega\,(x, y, y' \ldots y^{(n)}, \varphi, \varphi')$ erledigt sich nun unmittelbar. Da φ hierin irgend eine Differentialinvariante sein soll, so ist in die Formel (a) das Increment $\delta\varphi = 0$ zu setzen, sodass kommt:

$$\delta\varphi' = -\varphi'\frac{d\delta x}{dx}.$$

Diese Werthe für $\delta\varphi$ und $\delta\varphi'$ in (I) eingesetzt, liefert für Ω folgende

$$0 = \frac{\partial \Omega}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \Omega}{\partial y'}\delta y' + \ldots\ldots + \frac{\partial \Omega}{\partial y^{(n)}}\delta y^{(n)} + \Omega\frac{d\delta x}{dx}$$

$$- \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi'}\varphi'\frac{d\delta x}{dx}.$$

Wir können nun nach den Integralparametern fragen, die auch φ'', φ''' u. s. w. enthalten. Zu dem Zwecke haben wir auch die Incremente von φ'', φ''' u. s. w. zu berücksichtigen. Sie ergeben sich aus (a) sofort, wenn wir darin φ durch φ', φ'' ... ersetzen. Aber wir brauchen die Rechnung nicht durchzuführen, wenn wir die Gleichungen (1) gelöst haben. Denn offenbar finden wir wie oben, dass die gesuchte Funktion Ω dem Integral eines Gleichungssystems analog (1) ist. Dies System besitzt dieselben Integrale wie (1). Endlich besitzt es noch ein Integral, das φ'', eines das φ''' u. s. w. enthält. Diese aber können wir sofort angeben. Denn alle diese Integrale sind ja auch für sich Integralparameter. Es genügt also, dass wir einen besonderen Integralparameter kennen, der $\varphi, \varphi', \varphi''$, einen besonderen, der $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi'''$ enthält u. s. w. Solche kennen wir in der That, wenn wir das System (1) integrirt haben. Bezeichnen wir nämlich mit $\bar{\Omega}$ ein Integral von (1), das φ' enthält, also etwa:

$$\bar{\Omega} = \Phi\,(x, y, y' \ldots \varphi'),$$

so ist, wenn φ eine Integralinvariante $I = \int \varphi dx$ bestimmt, auch $I = \int \bar{\Omega} dx$ eine solche. Setzen wir nun $\bar{\Omega}$ für φ, so ergiebt sich analog, dass

3 0112 072659300

auch $I_2 = \int \Phi\,(x, y, y' \ldots \frac{d\bar{\Omega}}{dx})\,dx$ eine Integralinvariante ist. Daher ist $\bar{\bar{\Omega}} = \Phi\,(x, y, y' \ldots \frac{d\bar{\Omega}}{dx})$ ein Integralparameter, der auch φ'' enthält. Entsprechend ist auch $\bar{\bar{\bar{\Omega}}} = \Phi\,(x, y, y' \ldots \frac{d\bar{\bar{\Omega}}}{dx})$ ein Integralparameter, der auch φ'' enthält u. s. w.

Gedruckt 6. Mai 1902.